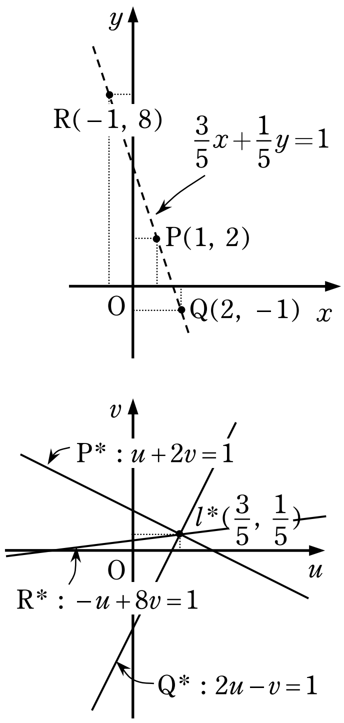
$\overset{\text{そうつい}}{\text{双対}}$原理（共点と共線，極と極線）

「異なる 3 直線 $a_1x+b_1y=1$, $a_2x+b_2y=1$, $a_3x+b_3y=1$ が 1 点で交わる（共点である）ならば，異なる 3 点(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) が同一直線上にある（共線である）」というおもしろい性質がある。簡単に証明してみよう。

〔証明〕3 直線 $a_1x+b_1y=1$, $a_2x+b_2y=1$, $a_3x+b_3y=1$ の交点を $\mathrm{P}(p, q)$とすると，
$a_1p+b_1q=1$, $a_2p+b_2q=1$, $a_3p+b_3q=1$ を満たす。$pa_1+qb_1=1$, $pa_2+qb_2=1$, $pa_3+qb_3=1$ と書き直すことができるから，3 点(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)は直線 $px+qy=1$ 上にあると言える。すなわち，3 点(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) が同一直線上にある。 ■

このことについて，もう少し詳しく解説しよう。

2 つの座標平面を考える。一方を xy 平面，もう一方を uv 平面とする。xy 平面上の点(a, b) に uv 平面上の直線 $au+bv=1$ を対応させ，xy 平面上の直線 $px+qy=1$ に uv 平面上の点(p, q) を対応させることを考えてみよう。



このようにすることで，xy 平面上での“点，直線”という概念と，uv 平面上での“点，直線”という概念を入れ替えることができる。このことを明確にするために，xy 平面上の点 P に対応する uv 平面上の直線を P^*，xy 平面上の直線 l に対応する uv 平面上の点を l^*で表すことにする。

2 点 $\mathrm{P}(1, 2)$，$\mathrm{Q}(2, -1)$ と，それに対応する 2 直線 $\mathrm{P}^*: u+2v=1$，$\mathrm{Q}^*: 2u-v=1$ を考えると，
直線 PQ（$=l$）は $y=-3x+5$ で，書き直すと $\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}y=1$ であり，2 直線 P^*，Q^*の交点は$\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$（$=l^*$）となる。

また，直線 PQ 上に点 $\mathrm{R}(-1, 8)$ をとると，直線 $\mathrm{R}^*: -u+8v=1$ は点 $l^*\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$ を通っている。

この結果から推測できるように，一般に xy 平面上の“点，直線”と uv 平面上の“点，直線”において，次のような関係が成立する。

xy 平面	uv 平面
点 A が l 上にある	直線 A^*が点 l^*を通る
直線 l が 2 点 A，B を通る	点 l^*で 2 直線 A^*，B^*は交わる
3 直線 l, m, n が 1 点 M で交わる	3 点 l^*, m^*, n^*は 1 直線 M^*上にある

これらの関係によって，xy 平面で成立する定理は，uv 平面で成立する**双対的定理**に置き換えられる。これを**双対原理**といい，ポンスレーによって 1814 年に確立された。

上記の xy 平面と uv 平面との対応を，円 $x^2+y^2=1$ に関する極と極線との間の対応と捉えることができるが，ここでは，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$と直線 P^*： $au+bv=1$，直線 $l:px+qy=1$ と点 $l^*(p,\ q)$ との対応を考えることにする。

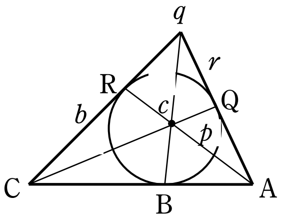
円 $C:x^2+y^2=r^2$ において，C 上の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線 l は $x_0x+y_0y=r^2$ である。この接線 l に対応する uv 平面上の点 l^*は$(u_0,\ v_0)=\left(\dfrac{x_0}{r^2},\ \dfrac{y_0}{r^2}\right)$ である。このとき，

$$u_0{}^2+v_0{}^2=\left(\frac{x_0}{r^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{r^2}\right)^2=\frac{x_0{}^2+y_0{}^2}{r^4}=\frac{1}{r^2}$$

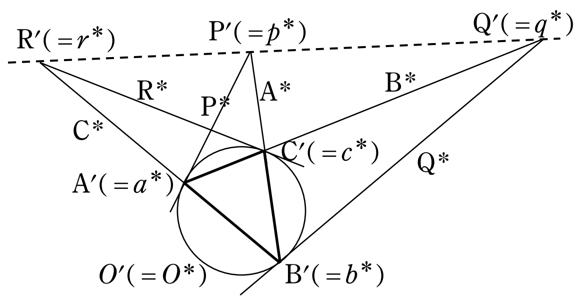
が成立する。点 P が円 C 上を動くとき，点 l^*は円 $C^*:u^2+v^2=\dfrac{1}{r^2}$ 上を動く。そこで，この対応によって，円 C は円 C^*に移ると考え，この円 C^*を円 C の双対曲線という。このとき，直線 $\mathrm{P}^*:x_0u+y_0v=1$ は円 C^*における点 l^*の接線となっている。すなわち，xy 平面で「直線 l は円 C 上の点 P における接線である」は，uv 平面で「直線 P^*は円 C^*上の点 l^*における接線である」となる。

このことから，次の 2 つの定理が双対的定理であることがわかる（右図を参考にして確かめてみてください）。
ゆえに，一方が証明されれば，双対原理によって他方も成立する。

定理Ⅰ　△ABC の内接円を O とし，辺 a，b，c との接点 P，Q，R と対頂点を結ぶ 3 つの直線を $p,\ q,\ r$ とするとき，$p,\ q,\ r$ は共点である。



定理Ⅱ　△A′B′C′の外接円を O' とし，3 点 A′，B′，C′における円 O' の接線と対辺 B′C′，C′A′，A′B′とのそれぞれの交点を P′，Q′，R′とするとき，P′，Q′，R′は共線である。



（数学セミナー(2000 年 2 月号)より）